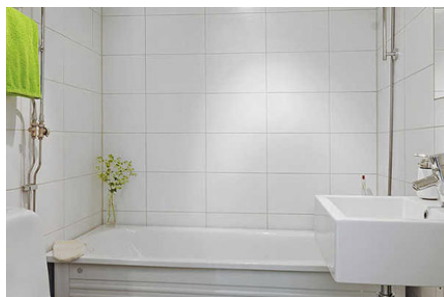


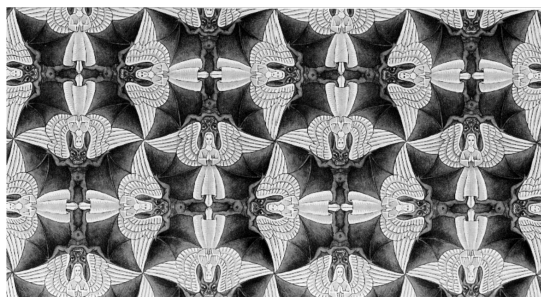
TEGELTJESWIJSHEDEN

DOOR CHARLENE KALLE

Betegelingen kom je overal tegen. Denk bijvoorbeeld aan een betegelde badkamermuur, een houten vloer of het patroon op het behang van je oma, maar ook aan tetris, Marokkaanse mozaïeken of tekeningen van Escher. Een betegeling bedekt de onderliggende ruimte volledig onder verschoven en gedraaide kopieën van een aantal basistegels, op zo'n manier dat de tegels mooi op elkaar aansluiten. Dit betekent dat alle punten die niet op de rand van een tegel liggen door precies één tegel bedekt worden. Voor de punten op de randen gaan we ervan uit dat ze in meerdere tegels tegelijk liggen (we zien de tegels als gesloten verzamelingen die naadloos op elkaar aansluiten). De badkamerbetegeling uit Figuur 1(a) heeft één basistegel en Escher's Engel-duivel in Figuur 1(b) gebruikt twee verschillende.



(a) Een badkamerbetegeling



(b) Engel-duivel

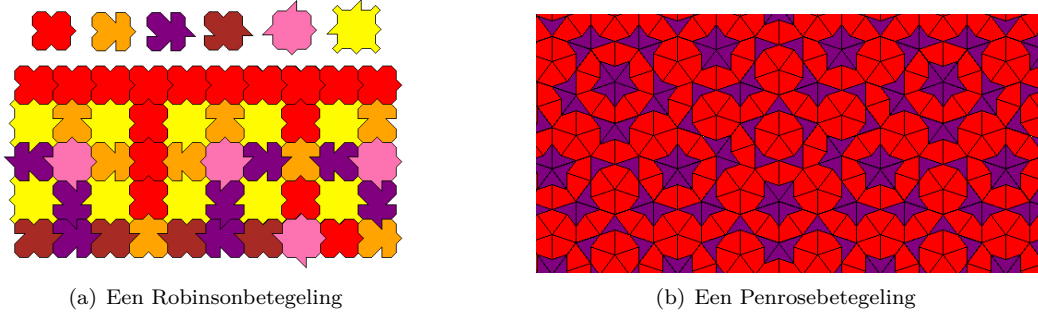
FIGUUR 1. In (a) zien we een periodieke badkamerbetegeling met één basistegel en (b) laat de betegeling Engel-duivel van Escher zien.

Sinds de jaren 60 is veel onderzoek gedaan naar betegelingen met bijzondere wiskundige eigenschappen, zoals periodiciteit. Als we de badkamerbetegeling uit Figuur 1(a) horizontaal of verticaal één tegel opschuiven, dan krijgen we dezelfde betegeling terug. De betegeling uit Figuur 1(b) kunnen we vier tegels opschuiven in horizontale of verticale richting voor hetzelfde effect. Een betegeling met deze vorm van regelmatigheid heet periodiek.

Hao Wang ([Wan61]) bekeek in 1961 verzamelingen van basistegels die niet-periodieke betegelingen geven. Hij deed dit in relatie met beslissingsproblemen in de logica. Wang bekeek eindige verzamelingen van vierkante tegels met gekleurde ribben. De kleuren van de ribben gaven aan welke vierkanten met elkaar gecombineerd mochten worden. Hij dacht dat als het vlak met een dergelijke verzameling basistegels betegeld kon worden, dat er dan altijd ook een periodieke betegeling met deze tegels zou bestaan. In 1966 werd dit vermoeden door zijn student Robert Berger weerlegd. Berger gaf een verzameling van 20.426 basistegels die alleen niet-periodieke betegelingen kunnen voortbrengen ([Ber66]). Een dergelijke verzameling basistegels heet aperiodiek. In de jaren daarna werden steeds kleinere aperiodieke verzamelingen gevonden en in 1971 heeft Rafael Robinson dit aantal teruggebracht tot zes ([Rob71]). Deze tegels zijn te zien in Figuur 2(a) met een bijbehorend stuk betegeling.

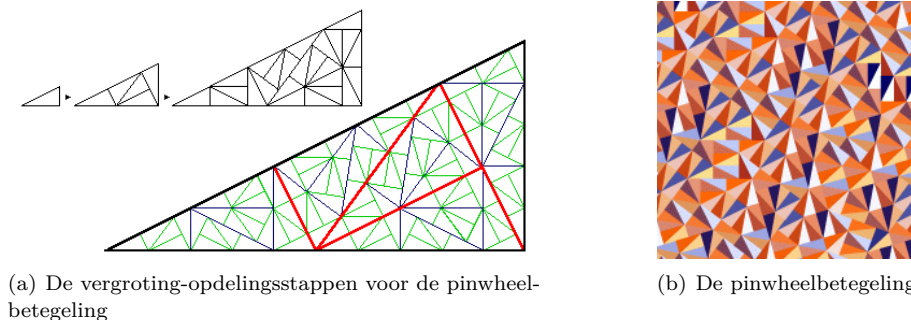
In 1973 bedacht Roger Penrose een andere aperiodieke verzameling van zes basistegels en niet veel later reduceerde hij dit aantal zelf tot twee: zijn beroemde 'kites' en 'darts' ([Pen79]). In Figuur 2(b) is een voorbeeld te zien van een Penrosebetegeling met deze basistegels. Omdat dit

soort tegels en betegelingen erg geschikt zijn om mooie puzzels mee te maken, duurde het even voordat Penrose zijn resultaten publiceerde. Dit deed hij pas nadat het patent dat hij op de tegels had aangevraagd in de Verenigde Staten, het Verenigd Koninkrijk en Japan was goedgekeurd. Penrosebetegelingen zijn niet periodiek, maar wel repetitief. Dit betekent dat je ieder eindig patroon over de hele betegeling op begrensde afstand steeds weer terug kunt vinden.



FIGUUR 2. In (a) zien we de aperiodieke verzameling van zes basistegels van Robinson met een stuk van een mogelijke betegeling. (b) laat een stuk Penrosebetegeling met ‘kites’ en ‘darts’ zien.

In de jaren 90 definieerde Charles Radin (zie bijvoorbeeld [Rad94]) een nieuw soort niet-periodieke betegelingen, de pinwheelbetegelingen. Deze betegelingen zijn gebaseerd op een constructie van John Conway en hebben maar één basistegel. Pinwheelbetegelingen zijn voorbeelden van zichzelf voortbrengende betegelingen. De basis hiervan is een cluster basistegels, die samen de centrale tegel genoemd worden, en die de bijzondere eigenschap hebben dat als ze met een bepaalde factor vergroot worden, het resultaat vervolgens weer opgesplitst kan worden in een aantal verschoven en gedraaide kopieën van de basistegels. In het geval van de pinwheelbetegeling is de centrale tegel een rechthoekige driehoek met verhouding 2:1 voor de rechte zijdes. Als deze driehoek met een factor $\sqrt{5}$ vergroot wordt, dan valt hij uiteen in vijf driehoeken die gelijkvormig zijn met de centrale tegel, zie Figuur 3(a). Door het proces van vergroten en opdelen te herhalen, ontstaat een steeds groter wordend stuk betegeling. In Figuur 3(b) is een stuk pinwheelbetegeling te zien. Het bijzondere aan de pinwheelbetegelingen is dat de basistegel op oneindig veel verschillende manieren gedraaid voorkomt.



FIGUUR 3. In (a) zijn de eerste paar stappen van het vergroting-opdelingsproces van de pinwheelbetegeling te zien en (b) laat een stuk pinwheelbetegeling zien.

De pinwheelbetegelingen waren niet de eerste bekende zelfvoortbrengende betegelingen. Ook de Penrosebetegelingen hebben een soortgelijke structuur. Een ander voorbeeld werd in 1982 door Gérard Rauzy geïntroduceerd in [Rau82]. Zijn centrale tegel wordt gedefinieerd aan de hand van

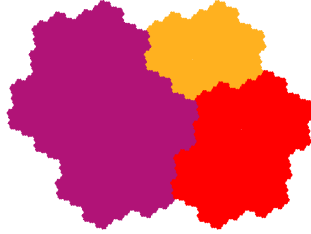
twee ingrediënten. Ten eerste gebruikt hij de oplossingen van de vergelijking $x^3 - x^2 - x - 1 = 0$. Deze vergelijking heeft één reële oplossing $\beta > 1$. Deze β heet het tribonaccigetel, vanwege de overeenkomst met de gulden snede die een oplossing is van de vergelijking $x^2 - x - 1 = 0$ en de relatie daarvan met de Fibonaccigetallen. Er geldt $\beta \approx 1.83929$. De vergelijking heeft verder twee complexe oplossingen, die binnen de eenheidscirkel liggen. Noem ze γ en $\bar{\gamma}$. Het andere ingrediënt is een bepaalde verzameling van oneindige rijen met nullen en enen, namelijk die rijen waarin nergens drie enen achter elkaar voorkomen. De centrale tegel wordt als volgt gedefinieerd:

$$(1) \quad \mathcal{T}_c = \left\{ \sum_{n \geq 0} b_n \gamma^n : \forall n \geq 0, b_n \in \{0, 1\} \text{ en } b_n b_{n+1} b_{n+2} = 0 \right\}.$$

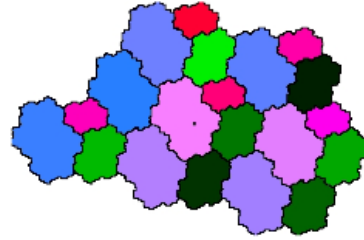
Met andere woorden, de rijen $(b_n)_{n \geq 0}$ zonder drie opeenvolgende enen worden afgebeeld naar de complexe getallen $\sum_{n \geq 0} b_n \gamma^n$ en $\mathcal{T}_c$ is de verzameling van al deze punten. Merk op dat de oneindige sommen convergeren omdat γ binnen de eenheidscirkel ligt.

$\mathcal{T}_c$ valt op een natuurlijke manier uiteen in drie deelverzamelingen die de basistegels van de Rauzybetegeling geven:

- $\mathcal{T}(0)$ is het beeld van alle rijtjes die met 0 beginnen ($b_0 = 0$). Dit is de paarse verzameling in Figuur 4(a).
- $\mathcal{T}(10)$ is het beeld van alle rijtjes die met 10 beginnen ($b_0 b_1 = 10$). Dit is de rode verzameling in Figuur 4(a).
- $\mathcal{T}(11)$ is het beeld van alle rijtjes die met 11 beginnen ($b_0 b_1 = 11$). Dit is de gele verzameling in Figuur 4(a).



(a) $\mathcal{T}_c$ met de onderverdeling in basistegels.



(b) De betegeling van Rauzy

FIGUUR 4. In (a) zien we de centrale tegel $\mathcal{T}_c$ van Rauzy met de onderverdeling in basistegels en in (b) een stuk van de bijbehorende zelfvoortbrengende betegeling.

De centrale tegel $\mathcal{T}_c$ en de basistegels zijn zelfvoortbrengend met een factor γ^{-1} . Neem bijvoorbeeld $\mathcal{T}(0)$. Omdat $b_0 = 0$, is $\gamma \mathcal{T}(0)$ de verzameling van alle punten

$$b_1 \gamma^2 + b_2 \gamma^3 + b_3 \gamma^4 + \dots,$$

oftewel, de verzameling van alle punten $\sum_{n \geq 0} b_n \gamma^n$ met $b_0 = 0$ en $b_1 = 0$. Voor $\mathcal{T}(10)$ en $\mathcal{T}(11)$ geldt hetzelfde: $\gamma \mathcal{T}(10)$ is het beeld van alle rijen die beginnen met 010 en $\gamma \mathcal{T}(11)$ is het beeld van alle rijen die beginnen met 011. Hieruit volgt dat

$$\mathcal{T}(0) = \gamma(\mathcal{T}(0) \cup \mathcal{T}(10) \cup \mathcal{T}(11)).$$

Op dezelfde manier kunnen we afleiden dat

$$\mathcal{T}(10) = \gamma \mathcal{T}(0) + 1 \quad \text{en} \quad \mathcal{T}(11) = \gamma \mathcal{T}(10) + 1.$$

Dus, als een basistegel wordt opblazen met factor γ^{-1} , dan is het resultaat een eindige vereniging van verschoven basistegels. Rauzy bewees in [Rau82] dat dit proces van opblazen en opdelen ook daadwerkelijk een betegeling geeft van $\mathbb{C}$, d.w.z. de verschoven tegels die je zo krijgt, sluiten netjes op elkaar aan.

De zelfvoortbrengende betegeling van Rauzy heeft een aantal bijzondere eigenschappen. Zo is hij niet periodiek, wel repetitief en hebben de basistegels een fractale rand. Er is ook een verrassende relatie met een bepaalde manier van getallen schrijven. Getallen worden meestal weergegeven door hun decimale ontwikkeling: 0.375 interpreteren we als het getal $\frac{3}{10} + \frac{7}{100} + \frac{5}{1000} = \frac{3}{8}$. Dit is niet de enige manier om getallen te schrijven. De binaire ontwikkeling bijvoorbeeld heeft het getal 2 als basis en de cijfers kunnen 0 of 1 zijn: $\frac{3}{8} = \frac{1}{2} + \frac{0}{4} + \frac{1}{8}$. In plaats van een geheel getal, kunnen we ook een niet-geheel getal als basis nemen. Stel dat β een reëel getal tussen 1 en 2 is. Er bestaat een algoritme dat voor iedere x tussen 0 en 1 een oneindige rij van nullen en enen $(b_n)_{n \geq 0}$ produceert waarvoor geldt dat

$$x = \frac{b_0}{\beta} + \frac{b_1}{\beta^2} + \frac{b_2}{\beta^3} + \frac{b_3}{\beta^4} + \dots$$

Deze laatste uitdrukking heet een β -ontwikkeling van het getal x . Het algoritme lijkt sprekend op de manier waarop binaire cijfers bepaald worden en gaat als volgt: Schrijf $x_0 = x$. Als $x_0 \leq \frac{1}{\beta}$, schrijf dan $b_0 = 0$ en anders $b_0 = 1$. Dan geldt $0 \leq \beta x_0 - b_0 \leq 1$. Schrijf $x_1 = \beta x_0 - b_0$ en herhaal.

Dit algoritme produceert voor iedere $1 < \beta < 2$ en $x \in [0, 1]$ een cijferrij $(b_n)_{n \geq 0}$. We bekijken een voorbeeld. Neem β gelijk aan het tribonaccigetel en $x = 1$. Dan geeft het algoritme:

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 > \frac{1}{\beta}, & \text{dus } b_1 &= 1, \\ x_2 &= \beta - 1 > \frac{1}{\beta}, & \text{dus } b_2 &= 1, \\ x_3 &= \beta^2 - \beta - 1 = \frac{1}{\beta}, & \text{dus } b_3 &= 0, \\ x_4 &= \beta \cdot \frac{1}{\beta} - 0 = 1, & \text{dus } b_4 &= 1. \end{aligned}$$

Dit betekent dat 1 de volgende periodieke β -ontwikkeling heeft:

$$1 = \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\beta^2} + \frac{0}{\beta^3} + \frac{1}{\beta^4} + \frac{1}{\beta^5} + \frac{0}{\beta^6} + \dots$$

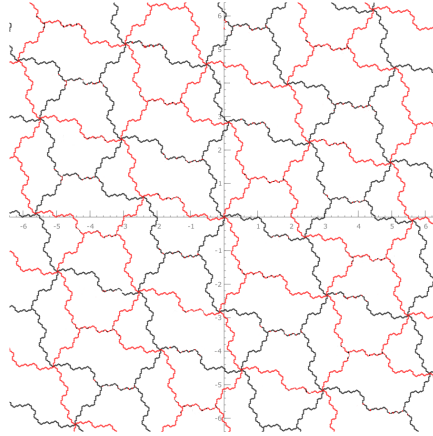
Niet alle mogelijke rijen van nullen en enen worden geproduceerd door het algoritme. De verzameling van alle cijferrijen die het algoritme produceert hangt af van β en de bijbehorende β -ontwikkeling van 1 . In het geval dat β het tribonaccigetel is, worden bijvoorbeeld alleen de rijen zonder drie opeenvolgende enen geproduceerd. Dit is de reden waarom de centrale tegel $\mathcal{T}_c$ gedefinieerd is zoals in (1). Het is de relatie tussen γ en de gebruikte rijen $(b_n)_{n \geq 0}$.

Het tribonaccigetel is een specifiek voorbeeld van een Pisot-getal. Pisot-getallen zijn reële getallen groter dan 1 die de oplossing zijn van een vergelijking van de vorm $x^d + a_1 x^{d-1} + \dots + a_{d-1} x + a_d = 0$ die aan wat extra eisen voldoet. Alle coëfficiënten a_i moeten gehele getallen zijn, de polynoom in de vergelijking mag niet te schrijven zijn als het product van twee polynomen van kleinere graad en alle andere oplossingen van de vergelijking moeten binnen de eenheidscirkel liggen. Als bovendien geldt dat $|a_d| = 1$, dan heet het getal een Pisot-eenheid. Het tribonaccigetel is dus ook een Pisot-eenheid. In 1989 breidde William Thurston de constructie van Rauzy uit van het tribonaccigetel naar Pisot-eenheden in het algemeen ([Thu89]). De centrale tegel uit deze constructie geeft informatie over de β -ontwikkelingen van de bijbehorende Pisot-eenheid. Er is bijvoorbeeld een sterk verband tussen de positie van de oorsprong ten opzichte van de centrale tegel en de verzameling van getallen die een periodieke β -ontwikkeling hebben.

Het is bekend dat de constructie van Thurston voor iedere Pisot-eenheid een meervoudige betegeling geeft: De punten die niet op de rand van een tegel liggen worden allemaal door hetzelfde aantal tegels bedekt. Dit kun je zien als meerdere betegelingen die over elkaar heen liggen. Hoeveel dit er zijn, is in het algemeen niet bekend en kan mogelijk afhangen van β . Voor een aantal specifieke gevallen is bewezen dat de constructie van Thurston een (enkelvoudige) betegeling geeft en men vermoedt dat hetzelfde geldt voor alle Pisot-getallen. Dit heet het Pisot-vermoeden.

In de afgelopen decennia is gebleken dat de constructie van Thurston nog veel verder gegeneraliseerd kan worden. Het is bijvoorbeeld mogelijk om β -ontwikkelingen te gebruiken die voortgebracht worden door een ander algoritme, voor $\beta > 2$ of met andere cijfers dan alleen 0 en 1 . In [KS12] hebben we deze mogelijkheden op een heel algemene manier onderzocht voor Pisot-eenheden en we hebben laten zien dat de constructie in al deze gevallen een meervoudige, zelfvoortbrengende,

repetitieve betegeling geeft. Ook hebben we een voorbeeld gevonden van een algoritme dat een tweevoudige betegeling oplevert. Hiervoor hebben we β -ontwikkelingen genomen met cijfers 0, 1 en -1 en met β gelijk aan het tribonaccigetal. De tweevoudige betegeling is te zien in Figuur 5. De rode lijnen geven de tegels aan van één betegeling en de zwarte lijnen markeren de andere betegeling. Dit laat zien dat het Pisot-vermoeden niet waar is als het achterliggende algoritme iets wordt aangepast. Als het Pisot-vermoeden klopt, zal het antwoord waarschijnlijk gezocht moeten worden in de specifieke eigenschappen van het oorspronkelijke algoritme.



FIGUUR 5. De tweevoudige betegeling die hoort bij een algoritme dat β -ontwikkelingen produceert met cijfers 0, 1 en -1.

Veel informatie over betegelingen met bijbehorende plaatjes kun je vinden op de Tilings Encyclopedia: tilings.math.uni-bielefeld.de.

REFERENTIES

- [Ber66] R. Berger, The undecidability of the domino problem. *Mem. Amer. Math. Soc. No.*, 66: 72, 1966.
- [KS12] C. Kalle en W. Steiner, Beta-expansions, natural extensions and multiple tilings associated with Pisot units. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 364(5): 2281–2318, 2012.
- [Pen79] R. Penrose, Pentaplexity: a class of nonperiodic tilings of the plane. *Math. Intelligencer*, 2(1): 32–37, 1979/80.
- [Rad94] C. Radin, The pinwheel tilings of the plane. *Ann. of Math.*, 139(3): 661–702, 1994.
- [Rau82] G. Rauzy, Nombres algébriques et substitutions. *Bull. Soc. Math. France*, 110(2): 147–178, 1982.
- [Rob71] R. Robinson, Undecidability and nonperiodicity for tilings of the plane. *Invent. Math.*, 12: 177–209, 1971.
- [Thu89] W. Thurston, Groups, tilings and finite state automata. *Lecture notes distributed in conjunction with the Colloquium Series*, in AMS Colloquium lectures, 1989.
- [Wan61] H. Wang, Proving theorems by pattern recognition – II. *Bell System Technical Journal*, 40(1): 1–41, 1961.
- [Foto Charlene Kalle] De foto van Charlene Kalle is gemaakt door Pim Rusch.